1761

Principia motus fluidorum

Leonhard Euler

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

PARS PRIOR.

1.

Cum corpora fluida a ſolidis hoc potiſſimum differant, quod eorum particulae a ſe inuicem omnino ſint diſſolutae, hae etiam diuerſiſſimos motus recipere poſſunt, neque motus, quo vnaquaeque fluidi particula fertur, a motu reliquarum particularum ita determinatur, vt alio motu progredi non poſſit. Longe aliter autem res ſe habet in corporibus ſolidis, quae, ſi fuerint inflexibilia, nullamque figurae ſua mutationem patiantur, vtcunque moueantur, ſingulae eorum particulae perpetuo eundem inter ſe ſitum ac diſtantiam ſeruant; vnde fit, vt, cognito motu duarum triumue tantum particularum, ſtatim alius cuiuscunque particulae motus definiri queat; neque etiam duarum triumue huiusmodi corporum particularum motus ad lubitum fingi poteſt, ſed is ita comparatus eſſe debet, vt hae particulae eundem perpetuo ſitum relatiuum inter ſe obtineant.

2. Quodſi autem corpora ſolida fuerint flexibilia, ſingularum particularum motus minus determinatur: cum

cum ob flexuras tam distantia, quam situs relatiuus diversarum particularum, mutationes admittat. Interim tamen ipsa flexurae ratio legem quandam, quam diversae huiusmodi corporum particulae in motu suo sequi debent, constituit: quippe qua caueri oportet, ne partes, quae circa se inuicem tantum inflecti se patiuntur, vel a se penitus diuellantur, vel in se inuicem intrudantur; quod quidem posterius inpenetrabilitas omnibus corporibus communis exigit.

3. In corporibus autem fluidis, quorum particulae nullo nexu inter se vniuntur, motus quoque diversarum particularum multo minus restringitur: neque ex motu quotcunque particularum motus reliquarum determinatur. Si enim vel centum particularum motus, tanquam cognitus assumatur, manifestum est, motus quorum reliquae particulae capaces sint futurae, adhuc in infinitum variari posse. Ex quo concludendum videtur, motum cuiusque particulae fluidi plane non a motu reliquarum pendere, nisi forte his ita fuerit interclusa, vt eas necessario sequi cogatur.

4. Interim tamen fieri non potest, vt motus omnium fluidi particularum nullis omnino legibus adstringatur; neque adeo pro lubitu motum, qui singulis particulis inesse concipitur, fingere licet. Cum enim particulae sint impenetrabiles, statim patet, eiusmodi motum subsistere non posse, quo aliae particulae per alias transirent, sicque se mutuo penetrarent: atque, ob hanc causam, talis motus, ne cogitatione quidem in fluido inesse concipi potest. Quoniam igitur infinitos motus

motus excludi oportet, quorum pacto reliqui ſint comparati, et quanam proprietate ab illis diſtinguantur operae pretium videtur, accuratius definire.

5. Antequam enim motus, quo fluidum quodpiam actu agitatur, aſſignari queat, neceſſarium videtur, vt omnes motus, qui quidem in hoc fluido ſubſiſtere poſſent, dignoſcantur: quos motus hic poſſibiles vocabo, vt a motibus impoſſibilibus, qui ne locum quidem habere poſſunt, diſtinguam. In hunc finem nobis conſtituendus erit character, motibus poſſibilibus conueniens, eosque ab impoſſibilibus ſegregans; quo facto ex motibus poſſibilibus quouis caſu eum determinari oportebit, qui actu ineſſe debebit. Tum ſcilicet ad vires, quibus aqua ſollicitatur, erit reſpiciendum, vt motus, qui illis ſit conformis, ex mechanicae principiis definiri poſſit.

6. In characterem igitur motuum poſſibilium, quicunque ſcilicet ſalua impenetrabilitate in fluido ineſſe poſſunt, inquirere hic conſtitui. Fluidum autem eius indolis aſſumo, vt neque in arctius ſpatium compelli ſe patiatur, neque eius continuitas interrumpi poſſit: ſtatuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum ſpatium a fluido vacuum relinqui, ſed continuitatem in eo iugiter conſeruari. Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum denſitas eſt variabilis, et quae ne continuitatem quidem neceſſario requirunt, extendere.

7. Si igitur in huiusmodi fluido conſideretur portio quaecunque, motus, quo ſingulae eius particulae

feruntur, ita debet esse comparatus, vt omni tempore aequale spatium adimpleant. Hoc enim si in singulis portionibus eueniat, omnis vel expansio in maius spatium, vel coarctatio in minus spatium praepedietur; atque huiusmodi motus, si ad hanc solam indolem respiciamus, qua fluidum neque expansionis, neque condensationis, capax statuitur, omnino pro possibili erit habendus. Quod autem hic de qualibet fluidi portione dictum est, de singulis eius elementis est intelligendum; ita vt cuiusque elementi volumen perpetuo eiusdem quantitatis manere debeat.

8. Quo ergo huic conditioni satisfiat, in singulis fluidi punctis motus quicunque inesse concipiatur; tum sumto quocunque fluidi elemento inuestigetur translatio momentanea singulorum eius terminorum, sicque innotescet spatiolum, in quo hoc elementum elapso tempusculo minimo continebitur. Deinde hoc spatiolum illi, quod ante occupauerat, aequale statuatur, haecque aequatio rationem motus, quatenus erit possibilis, indicabit. Quodsi enim singula elementa singulis tempusculis aequalia spatiola occupent, neque vlla fluidi compressio, neque expansio, orietur; motusque ita erit comparatus, vt pro possibili sit habendus.

9. Cum autem hic non solum celeritas motus, qui singulis fluidi punctis inesse concipitur, spectari debeat, sed etiam eius directio, haec vtraque consideratio commodissime instituetur, si motus cuiusque puncti secundum directiones fixas resoluatur. Haec autem resolutio vel secundum binas, vel ternas directiones fieri

fieri folet: priori enim refolutione vti licet, fi fingulorum punctorum motus in eodem plano abfoluatur; fin autem eorum motus non in eodem plano contineatur, tum motum fecundum ternos axes fixos refolui oportet. Quoniam igitur hic pofterior cafus plus difficultatis habet quam prior, inueftigationem motuum poffibilium a cafu priori incipi conueniet, qua expedita cafus pofterior facilius expedietur.

10. Primum igitur fluido duas tantum dimenfiones tribuam, ita vt fingulae eius particulae non folum nunc quidem in eodem plano reperiantur, fed etiam earum motus in eodem plano abfoluatur. Hoc itaque planum plano tabulae reprefentetur, et confideretur, fluidi quodcunque punctum l, cuius fitus per coordinatas orthogonales $AL = x$ et $Ll = y$ referatur, tum vero eius motus, quo nunc quidem fertur, fecundum easdem directiones refolutus praebeat celeritatem fecundum axem AL, vel fecundum $lm = u$, et fecundum alterum axem AB, vel fecundum $ln = v$: ita vt vera huius puncti celeritas futura fit $= \sqrt{(uu + vv)}$, eiusque directio ad axem AL inclinata fit angulo, cuius tangens $= \frac{v}{u}$. Tab. IV. Fig. 1.

11. Cum ftatum motus praefentem tantum, qui fingulis fluidi punctis conueniat, euoluere fit propofitum, celeritates u et v a fitu puncti l vnice pendebunt, eruntque idcirco tanquam functiones coordinatarum x et y fpectandae. Ponamus igitur effe differentiatione inftituta:

$$du = L dx + l dy \text{ et } dv = M dx + m dy$$

quae formulae differentiales, cum sint completae, constat fore $\frac{dL}{dy}=\frac{dl}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}=\frac{dm}{dx}$: vbi notandum est, in huiusmodi expressione $\frac{dL}{dy}$; differentiale ipsius L, seu dL, tantum ex variabilitate ipsius y capiendum esse, simili que modo in expressione $\frac{dl}{dx}$, pro dl id differentiale ipsius l sumi debet, quod oritur si tantum x pro variabili habeatur.

12. Probe ergo cauendum est, ne in huiusmodi expressionibus fractis $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dl}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, et $\frac{dm}{dx}$, numeratores dL, dl, dM et dm differentialia completa functionum L, l, M et m designare putentur; sed perpetuo ea tantum earum differentialia denotant, quae ex variabilitate vnicae coordinatae, eius scilicet, cuius differentiale in denominatore exhibetur, oriuntur; sicque huiusmodi expressiones semper quantitates finitas ac determinatas repraesentabunt. Simili autem modo intelligitur, fore $L=\frac{du}{dx}$, $l=\frac{du}{dy}$; $M=\frac{dv}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$; qua notandi ratione primum Clar. *Fontaine* vsus est, et quia non contemnendum calculi compendium largitur, eam hic quoque adhibebo.

13. Cum igitur sit $du=Ldx+ldy$ et $dv=Mdx+mdy$, hinc geminas celeritates cuiusque alius puncti, quod quidem infinite parum a puncto l distat, assignare licebit; si enim talis puncti a puncto l distantia secundum axem AL sit $=dx$, et secundum axem $AB=dy$, tum huius puncti celeritas secundum axem AL erit $=u+Ldx+ldy$; celeritas autem secundum alterum axem $AB=v+Mdx+mdy$. Tempusculo ergo infinite paruo dt hoc punctum proferetur secundum

dum directionem axis AL per spatiolum $= dt(u + L\,dx + l\,dy)$ et secundum directionem alterius axis AB per spatiolum $= dt(v + M\,dx + m\,dy)$.

14. His notatis consideremus elementum aquae triangulare lmn, et quaeramus situm, in quem id ob motum, quem ipsi insitum concipimus, tempusculo dt transferatur. Sit autem huius elementi triangularis lmn latus lm axi AL, latus vero ln axi AB, parallelum: ac ponatur $lm = dx$, et $ln = dy$; seu sint pro puncto m coordinatae $x + dx$ et y; pro puncto n autem sint coordinatae x et $y + dy$. Patet autem, quoniam relationem inter differentialia dx et dy non definimus, eaque tam negatiue, quam affirmatiue, accipi possint, totam fluidi massam in huiusmodi elementa cogitatione diuidi posse, ita vt, quod de vno in genere definiemus, id aeque ad omnia pateat.

15. Vt igitur pateat, quotum elementum hoc lmn, ob motum insitum, tempusculo dt transferatur, quaeramus puncta p, q et r, in quae eius anguli, seu puncta l, m et n, tempusculo dt transferentur. Cum igitur sit

	puncti l	puncti m	puncti n
Celeritas secundum $AL =$	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$
Celeritas secundum $AB =$	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$

punctum l perueniet tempusculo dt in p, vt sit:

$$AP - AL = u\,dt, \text{ et } Pp - Ll = v\,dt.$$

Punctum autem m perueniet in q, vt sit:

$$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt \text{ et } Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt.$$

Mm 3 At

At punctum n feretur in r, vt fit:

$$AR - AL = (u + l\,dy)dt \text{ et } Rr - Ln = (v + m\,dy)dt.$$

16. Cum igitur puncta l, m et n tempusculo dt in puncta p, q et r transferantur, iunctis lineolis rectis pq, pr et qr triangulum lmn, in situm, quem triangulum pqr refert, peruenire censendum est. Quoniam enim triangulum lmn statuitur infinite paruum, eius latera per motum curuaturam recipere nequeunt, ideoque elementum aquae lmn post translationem tempusculo dt factam, etiamnum figuram triangularem pqr, et quidem rectilineam, retinebit Cum igitur hoc elementum lmn per motum, neque in maius spatium extendi, neque in minus compingi, debeat, motum ita comparatum esse oportet, vt area trianguli pqr aequalis areae trianguli lmn reddatur.

17. Trianguli autem lmn, cum sit ad l rectangulum, area est $= \frac{1}{2}dx\,dy$, cui propterea area trianguli pqr aequalis est statuenda. Ad hanc autem aream inueniendam considerandae sunt punctorum p, q, r binae coordinatae, quae sunt:

$$AP = x + u\,dt;\ AQ = x + dx + (u + L\,dx)dt;\ AR = x + (u + l\,dy)dt$$
$$Pp = y + v\,dt;\ Qq = y + (v + M\,dx)dt,\ Rr = y + dy + (v + m\,dy)dt$$

Tum vero area trianguli pqr ex areis sequentium trapeziorum ita reperitur, vt fit:

$$pqr = PprR + RrqQ - PpqQ.$$

Cum autem haec trapezia bina latera parallela basique AQ perpendicularia habeant, eorum areae facile assignantur.

18. Erit

18. Erit enim vti ex elementis conſtat:

$$PprR = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr)$$
$$RrqQ = \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq)$$
$$PpqQ = \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq)$$

His igitur colligendis reperietur:

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PQ.\,Rr - \tfrac{1}{2}RQ.\,Pp - \tfrac{1}{2}PR.\,Qq$$

Ponatur breuitatis gratia

$AQ = AP + Q$; $AR = AP + R$; $Qq = Pp + q$ et $Rr = Pp + r$ vt ſit $PQ = Q$; $PR = R$ et $RQ = Q - R$, eritque $\Delta pqr = \tfrac{1}{2}Q(Pp + r) - \tfrac{1}{2}(Q - R)Pp - \tfrac{1}{2}R(Pp + q)$ ſiue $\Delta pqr = \tfrac{1}{2}Q.r - \tfrac{1}{2}R.q$.

19. Eſt vero ex valoribus coordinatarum ante exhibitis

$$Q = dx + L\,dx\,dt:\quad q = M\,dx\,dt$$
$$R = \quad l\,dy\,dt;\quad r = dy + m\,dy\,dt;$$

quibus valoribus ſubſtitutis, orietur area trianguli

$$pqr = \tfrac{1}{2}dx\,dy(1 + L\,dt)(1 + m\,dt) - \tfrac{1}{2}M\,l\,dx\,dy\,dt^2, \text{ ſiue}$$
$$pqr = \tfrac{1}{2}dx\,dy(1 + L\,dt + m\,dt + L\,m\,dt^2 - M\,l\,dt^2)$$

quae cum aequalis eſſe debeat areae trianguli lmn, quae eſt $= \tfrac{1}{2}dx\,dy$, haec naſcetur aequatio:

$$L\,dt + m\,dt + L\,m\,dt^2 - M\,l\,dt^2 = 0 \text{ ſiue}$$
$$L + m + L\,m\,dt - M\,l\,dt = 0.$$

20. Cum igitur termini $L\,m\,dt$ et $M\,l\,dt$ prae finitis L et m euaneſcant, habebitur haec aequatio $L + m = 0$. Quam ob rem, vt motus ſit poſſibilis, celeritates u et v puncti cuiuscunque l, ita debent eſſe comparatae, vt poſitis earum differentialibus

$$du = L\,dx + l\,dy, \text{ et } dv = M\,dx + m\,dy$$

ſit

fit $L+m=0$. Seu cum fit $L=\frac{du}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$, celeritates u et v, quae puncto l fecundum directiones axium AL et AB inesse concipiuntur, eiusmodi functiones coordinatarum x et y esse debent, vt fit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$, ficque motuum possibilium criterium in hoc consistit, vt fit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$; nisi enim haec conditio locum habeat, motus fluidi fubfistere nequit.

21. Eodem modo erit procedendum, si motus fluidi non absoluatur in eodem plano. Ponamus igitur, vt quaestionem latissimo sensu acceptam expediamus, fingulas fluidi particulas motu quocunque inter se agitari, hac folum lege obferuata, vt neque condenfatio, neque expansio partium vsquam eueniat: quaeritur igitur simili modo, quaenam hinc determinatio ad celeritates, quas fingulis punctis inesse concipimus, accedat, vt motus possibilis reddatur: feu quod eodem redit, omnes motus, qui hisce conditionibus aduerfantur, a possibilibus remouere oportet, quo ipfo criterium motuum possibilium constituetur.

22. Consideremus igitur punctum fluidi quodcunque λ; ad cuius situm repraesentandum vtamur tribus axibus fixis AL, AB et AC inter se normalibus.

Tab. IV. Fig. 2. Sint igitur ternae puncti λ coordinatae his axibus parallelae, $AL=x$, $Ll=y$ et $l\lambda=z$; quae obtinentur, si primum a puncto λ ad planum duobus axibus AL et AB determinatum demittatur perpendiculum λl; tum vero ex puncto l ad axem AL perpendicularis lL agatur. Hoc itaque modo situs puncti λ per ternas istas coordinatas generalissime exprimitur, atque ad omnia fluidi puncta accommodari potest.

23. Qui-

23. Quicunque porro fit motus puncti λ, is fecundum ternas directiones $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ et λo axibus AL AB et AC parallelas refolui poterit Sit igitur puncti λ

celeritas fecundum directionem $\lambda\mu = u$

celeritas fecundum directionem $\lambda\nu = v$

celeritas fecundum directionem $\lambda o = w$

et cum hae celeritates pro vario puncti λ fitu vtcunque variare poffint, erunt eae tanquam functiones ternarum coordinatarum x, y et z confiderandae. Iis igitur differentiatis, ponamus prodire:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz$$

eruntque porro quantitates L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν, functiones coordinatarum x, y et z.

24. Quoniam hae formulae differentiales funt completae, fequitur, fimili modo, vt fupra, fore:

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\ \frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\ \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}$$
$$\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx};\ \frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\ \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}$$
$$\frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\ \frac{dN}{dz} = \frac{d\nu}{dx};\ \frac{dn}{dz} = \frac{d\nu}{dy}$$

fiquidem in numeratoribus ea tantum coordinatarum, cuius differentiale in denominatore exhibetur, pro variabili affumatur.

25. Triplici ergo motu hoc, quem in puncto X ineffe concipimus, hoc punctum λ tempufculo dt ita mouebitur, vt

fecundum directionem axis AL per fpatiolum $= u\,dt$
fecundum directionem axis AB per fpatiolum $= v\,dt$
fecundum directionem axis AC per fpatiolum $= w\,dt$

promoueatur. Sin autem puncti λ vera celeritas, quae scilicet ex compositione huius triplicis motus oritur, dicatur $= V$, erit ob normalitatem trium directionum $V = \sqrt{(uu + vv + ww)}$, et spatiolum, quod tempusculo dt motu suo vero conficit, erit $= V dt$.

26. Consideremus iam fluidi elementum quodpiam solidum, vt videamus, quorsum id tempusculo dt proferatur; et quoniam perinde est, cuiusmodi figuram isti elemento tribuamus, dummodo ita generatim definiatur, tota fluidi massa, in eiusmodi elementa diuisa, concipi queat; sit, vt calculo consulatur, eius figura pyramis triangularis rectangula, terminata quatuor angulis solidis λ, μ, ν et o, ita vt pro singulis sint ternae coordinatae:

	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
secundum AL	x	$x + dx$	x	x
secundum AB	y	y	$y + dy$	y.
secundum AC	z	z	z	$z + dz$

et cum basis huius pyramidis sit $\lambda\mu\nu = lmn = \frac{1}{2} dx dy$, altitudo vero $\lambda o = dz$, erit eius solliditas $= \frac{1}{6} dx dy dz$.

27. Inuestigemus iam, quorsum singuli isti pyramidis anguli λ, μ, ν et o tempusculo dt transferantur: ad quod eorum ternas celeritates secundum directiones ternorum axium contemplari oportet, quae ex celeritatum u, v, w valoribus differentialibus erunt:

Celeritas secundum	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti o
directionem AL	u	$u + L dx$	$u + l dy$	$u + \lambda dz$
directionem AB	v	$v + M dx$	$v + m dy$	$v + \mu dz$
directionem AC	w	$w + N dx$	$w + n dy$	$w + \nu dz$

28. Quodsi ergo puncta λ, μ, ν et o tempusculo dt in puncta π, Φ, ϱ et σ transferri ponamus, horum-

horumque punctorum ternas coordinatas axibus parallelas constituamus, erunt translationes momentaneae secundum hos axes:

$AP - AL = u\,dt$	$Pp - Ll = v\,dt$	$p\pi - l\lambda = w\,dt$
$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt$	$Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt$	$q\Phi\ m\mu = (w + N\,dx)\,dt$
$AR - AL = (u + l\,dy)\,dt$	$Rr - Ln = (v + m\,dy)\,dt$	$r\varrho - n\nu = (w + n\,dy)\,dt$
$AS - AL = (u + \lambda\,dz)\,dt$	$Ss - Ll = (v + \mu\,dz)\,dt$	$s\sigma - lo = (w + \nu\,dz)\,dt$

Hinc ergo ternae coordinatae pro his quatuor punctis π, Φ, ϱ et σ erunt:

$AP = x + u\,dt$; $Pp = y + v\,dt$; $p\pi = z + w\,dt$

$RQ = x + dx + (u + L\,dx)\,dt$; $Qq = y + (v + M\,dx)\,dt$; $q\Phi = z + (w + N\,dx)\,dt$

$AR = x + (u + l\,dy)\,dt$; $Rr = y + dy + (v + m\,dy)\,dt$; $r\varrho = z + (w + n\,dy)\,dt$

$AS = x + (u + \lambda\,dz)\,dt$; $Ss = y + (v + \mu\,dz)\,dt$; $s\sigma = z + dz + (w + \nu\,dz)\,dt$

29. Cum igitur elapſo tempuſculo dt anguli pyramidis λ, μ, ν et o in puncta π, Φ, ϱ et σ ſint translati, ipſa pyramis nunc pyramidem pariter triangularem $\pi\Phi\varrho\sigma$ conſtituet; ideoque ob indolem fluidi efficiendum eſt, vt ſoliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ aequalis ſit ſoliditati pyramidis propoſitae $\lambda\mu\nu o$, ſeu $= \frac{1}{6}\,dx\,dy\,dz$. Totum ergo negotium huc redit, vt ſoliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ determinetur. Perſpicuum autem eſt, hanc pyramidem relinqui, ſi a ſolido $prq\pi\Phi\varrho\sigma$ auferatur ſolidum $pqr\pi\Phi\varrho$; quod poſterius ſolidum eſt priſma baſi triangulari pqr normaliter inſiſtens, et ſuperne ſectione obliqua $\pi\varrho\Phi$ truncatum.

30. In huiusmodi autem priſmata truncata tria quoque alterum ſolidum $pqr\pi\Phi\varrho\sigma$ reſolui poteſt, quae ſunt:

I. $pqs\pi\Phi\sigma$; II. $prs\pi\varrho\sigma$; III. $qrs\Phi\varrho\sigma$

ſicque effici debet, vt ſit

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = pqs\pi\phi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\phi\varrho\sigma - pqr\pi\phi\varrho.$$

Cum autem huiusmodi prisma baſi ſuae inferiori normaliter inſiſtat, tres autem altitudines habeat inaequales, eius ſoliditas reperietur, ſi baſis multiplicetur per trientem ſummae trium iſtarum altitudinum.

31. Hinc ergo ſoliditates horum prismatum truncatorum erunt:

$$\begin{aligned}
pqs\pi\phi\sigma &= \tfrac{1}{3}pqs(p\pi + q\phi + s\sigma)\\
prs\pi\varrho\sigma &= \tfrac{1}{3}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma)\\
qrs\phi\varrho\sigma &= \tfrac{1}{3}qrs(q\phi + r\varrho + s\sigma)\\
pqr\pi\phi\varrho &= \tfrac{1}{3}pqr(p\pi + q\phi + r\varrho).
\end{aligned}$$

Cum autem ſit $pqr = pqs + prs + qrs$, erit ſumma trium priorum prismatum poſtremo minuta, ſiue

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = -\tfrac{1}{3}p\pi.qrs - \tfrac{1}{3}q\phi.prs - \tfrac{1}{3}r\varrho.pqs + \tfrac{1}{3}s\sigma.pqr;$$

ſiue

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.s\sigma - 2pqs.r\varrho - 2prs.q\phi - 2qrs.p\pi.$$

32. Supereſt igitur, vt horum prismatum baſes definiantur: verum antequam hoc faciamus, ponamus ad ſequentem calculum contrahendum:

$$\begin{aligned}
AQ &= AP + Q;\ Qq = Pp + q;\ q\phi = p\pi + \phi\\
AR &= AP + R;\ Rr = Pp + r;\ r\varrho = p\pi + \varrho\\
AS &= AP + S;\ Ss = Pp + s;\ s\sigma = p\pi + \sigma
\end{aligned}$$

atque his poſtremis valoribus ſubſtitutis, termini $p\pi$ continentes ſe mutuo deſtruent, eritque

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.\sigma - 2pqs.\varrho - 2prs.\phi$$

ſicque

ſicque numerus baſium inueſtigandarum, vnitate eſt imminutus.

33. Iam triangulum pqr reperitur, ſi a figura $PprqQ$, ſeu a ſumma trapeziorum $PprR + RrqQ$ auferatur trapezium $PpqQ$; vnde erit

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq);$$

ſiue ob $PR = R$; $RQ = Q - R$; et $PQ = Q$ erit.

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Simili modo erit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq), \text{ ſeu}$$

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}(Q-S)(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp+Qq)$$

vnde fit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss - Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Ac denique

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) \text{ ſeu}$$

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}(S-R)(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss)$$

vnde fit:

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp - Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

34. His igitur valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$dx\,dy\,dz = (Qr - Rq)\sigma + (Sq - Qs)\varrho + (Rs - Sr)\Phi$$

ſiue pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ſoliditas erit

$$\tfrac{1}{6}(Qr - Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq - Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs - Sr)\Phi$$

Eſt autem ex coordinatarum valoribus ſupra §. 28 exhibitis

$$\begin{array}{lll} Q = dx + L\,dx\,dt & q = M\,dx\,dt & \Phi = N\,dx\,dt \\ R = l\,dy\,dt & r = dy + m\,dy\,dt & \varrho = n\,dy\,dt \\ S = \lambda\,dz\,dt & s = \mu\,dz\,dt & \sigma = dz + \nu\,dz\,dt. \end{array}$$

35. Cum igitur hinc fiat

$$Qr - Rq = dx\,dy(1 + L\,dt + m\,dt + Lm\,dt^2 - Ml\,dt^2)$$
$$Sq - Qs = dx\,dz(-\mu\,dt - L\mu\,dt^2 + M\lambda\,dt^2)$$
$$Rs - Sr = dy\,dz(-\lambda\,dt - m\lambda\,dt^2 + l\mu\,dt^2)$$

reperietur soliditas pyramidis $\pi\Phi\rho\sigma$ ita expressa

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz\left\{\begin{array}{llll} & +L\,dt & +Lm\,dt^2 & +Lm\nu\,dt^3 \\ & +m\,dt & -Ml\,dt^2 & -Ml\nu\,dt^3 \\ 1 & +\nu\,dt & +L\nu\,dt^2 & -Ln\mu\,dt^3 \\ & & +m\nu\,dt^2 & +Mn\lambda\,dt^3 \\ & & -n\mu\,dt^2 & -Nm\lambda\,dt^3 \\ & & -N\lambda\,dt^2 & +Nl\mu\,dt^3 \end{array}\right\}$$

quae cum debeat esse aequalis pyramidi $\lambda\mu\nu o = \tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz$ habebitur, diuisione per dt instituta, haec aequatio:

$$o = L + m + \nu + dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)$$
$$+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nl\mu)$$

36. Reiectis igitur terminis infinite paruis habebitur haec aequatio: $L + m + \nu = o$, qua ratio celeritatum u, v, w determinatur, vt motus fluidi fiat possibilis. Cum igitur sit $L = \frac{du}{dx}$, $m = \frac{dv}{dy}$ et $\nu = \frac{dw}{dz}$: criterium motus possibilis, si puncto fluidi cuicunque λ, cuius situs ternis coordinatis x, y et z definitur, eiusmodi celeritates u, v et w secundum easdem coordinatas directae tribuantur, vt sit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = o.$$

Hac scilicet conditione id obtinetur, vt nulla fluidi pars in motu, neque in magis, neque in minus spatium, transferatur, ac perpetuo cum fluidi continuitas, tum eadem densitas, conseruetur.

37.

37. Haec autem proprietas ita eſt interpretanda, vt pro eodem temporis momento ad omnia fluidi puncta extendatur: eodem ſcilicet momento omnium punctorum ternae celeritates u, v, w tales eſſe debent functiones ternarum coordinatarum x, y et z, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$: ſicque natura iſtarum functionum motum ſingulorum fluidi punctorum ad inſtans propoſitum definiet. Alio autem tempore eorundem punctorum motus vtcunque diuerſus eſſe poterit, dummodo pro quouis temporis puncto inuenta proprietas per totum fluidum locum habeat. Tempus ſcilicet hactenus tanquam quantitatem conſtantem ſum contemplatus.

38. Sin autem tempus quoque variabile ſpectare velimus, ita vt motus puncti λ, cuius ſitus ternis coordinatis $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$ indicatur, elapſo tempore t definiri debeat, manifeſtum eſt, ternas celeritates u, v et w non ſolum a coordinatis x, y et z, ſed inſuper etiam a tempore t pendere, ſeu functiones fore quatuor harum quantitatum x, y, z et t; ita vt earum differentialia huiusmodi formas ſint habitura:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt;\quad dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt;\quad dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt.$$

Interim tamen ſemper erit $L + m + \nu = 0$, propterea, quod quouis inſtanti tempus t pro conſtanti habetur, ſeu ſit $dt = 0$. Vtcunque igitur functiones u, v, et w cum tempore t mutantur, neceſſe eſt, vt pro omni temporis momento ſit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cum enim hac conditione efficiatur, vt quaeuis fluidi portio tempuſculo dt in ſpatium ſibi aequale transferatur,

tur, idem etiam per eandem conditionem in elemento temporis sequenti, omnibus ergo sequentibus temporis elementis euenire debebit.

PARS ALTERA.

39. Expositis ergo iis, quae ad motum tantum possibilem attinent, inuestigemus nunc etiam indolem eius motus, qui re vera in fluido subsistere potest. Hic igitur, praeter fluidi continuitatem, eiusdemque densitatis permanentiam, ratio quoque erit habenda virium, quibus singula fluidi elementa actu sollicitantur. Quando enim cuiusuis elementi motus, vel non est vniformis, vel non in directum porrigitur, motus immutatio viribus hoc elementum sollicitantibus conformis esse debet. Quare cum ex cognitis his viribus motus mutatio innotescat, praecedentes autem formulae etiam hanc motus mutationem contineant, hinc nouae deducentur determinationes, quibus motus hactenus tantum possibilis ad motum actualem restringitur.

40. Instituamus quoque hanc inuestigationem bipartito; ac primo concipiamus totum fluidi motum in eodem plano fieri. Sint ergo, vt ante, coordinatae situm puncti cuiusuis l definientes $AL = x$, $Ll = y$; ac nunc quidem elapso tempore t sint puncti l binae celeritates secundum directiones axibus AL et AB parallelas u et v: erunt u et v, quoniam nunc variabilitatis temporis ratio haberi debet, functiones ipsarum x, y et t, quo circa ponatur

Tab. IV. Fig. 1.

$$du = L\,dx + l\,dy + \mathfrak{L}\,dt \quad \text{et} \quad dv = M\,dx + m\,dy + \mathfrak{M}\,dt$$

atque

atque ob priorem conditionem iam ſupra inuenimus, eſſe debere $L + m = o$.

41. Cum igitur elapſo tempuſculo $= dt$ punctum l transferatur in p, abſoluto ſecundum axem AL ſpatiolo $= udt$, ſecundum alterum axem AB autem ſpatiolo $= vdt$; vt incrementa celeritatum u et v puncti l, quae tempuſculo dt ipſi inducuntur, obtineamus, pro dx et dy ſcribi oportet ſpatiola udt et vdt, vnde haec vera celeritatum incrementa prodibunt:

$$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt \text{ et } dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt$$

Ex quo vires acceleratrices, quae has accelerationes producere valent, erunt:

Vis accel. ſecundum $AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L})$

Vis accel. ſecundum $AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M})$

quibus ergo vires actu in aquae particulam l agentis aequales eſſe debebunt.

42. Inter vires autem, quae aquae particulas actu ſollicitant, primum conſideranda venit grauitas; cuius autem effectus, ſi planum, in quo fit motus, eſt horizontale, pro nihilo erit habendus. Sin autem fuerit decliue, axisque AL decliuitatem ſequatur, altero AB exiſtente horizontali, a grauitate orietur vis acceleratrix ſecundum AL conſtans, quae ſit $= \alpha$. Deinde non praetermittenda eſt frictio, qua ſaepe motus aquae non mediocriter impeditur; quanquam autem eius leges nondum ſunt ſatis exploratae, tamen frictionem corporum ſolidorum ſequentes non multum fortaſſe a ſcopo aberrabimus, ſi frictionem vbique preſſioni, qua aquae particulae ſe inuicem premunt, proportionalem ſtatuerimus.

43. Inprimis autem in computum eſt ducenda preſſio, qua particulae aquae vbique in ſe mutuo agunt, qua fit, vt quaelibet particula vndique ab adiacentibus comprimatur, et quatenus haec preſſio vndequaque non fuerit aequalis, eatenus particulae motus afficiatur. Vbique ſcilicet aqua in certo quodam ſtatu compreſſionis verſabitur, qui ſimilis erit ei, in quo aqua ſtagnans ad certam profunditatem exiſtit. Haec ergo profunditas, ad quam in aqua ſtagnante aqua in pari compreſſionis ſtatu reperitur, commodiſſime adhibebitur ad preſſionem in quouis fluidi puncto l exprimendam. Sit igitur p iſta altitudo, ſeu profunditas, ſtatum compreſſionis in l exprimens, eritque p functio quaedam coordinatarum x et y, ac ſi preſſio cum tempore in l quoque varietur, tempus quoque t in functionem p ingredietur.

Tab. IV. Fig. 3. 44. Ponamus ergo $dp = R\,dx + r\,dy + \mathfrak{R}\,dt$, et conſideremus elementum aquae quadrangulare rectangulum $lmno$, cuius latera ſint $lm = no = dx$ et $ln = mo = dy$; areaque $= dx\,dy$. Cum iam preſſio in l fit $= p$; preſſio in m erit $= p + R\,dx$, in $n = p + r\,dy$ et in $o = p + R\,dx + r\,dy$. Hinc latus lm premitur vi $= dx(p + \frac{1}{2}R\,dx)$, latus vero no contra premetur vi $= dx(p + \frac{1}{2}R\,dx + r\,dy)$; ab his ergo duabus viribus elementum $lmno$ ſecundum directionem ln vrgebitur vi $= -r\,dx\,dy$. Simili autem modo ex viribus $dy(p + \frac{1}{2}r\,dy)$ et $dy(p + R\,dx + \frac{1}{2}r\,dy)$, quae agunt in latera ln et mo, reſultabit vis elementum vrgens ſecundum directionem $lm = -R\,dx\,dy$.

45. Hinc

45. Hinc igitur orietur vis acceleratrix secundum $lm = -R$, et vis acceleratrix secundum $ln = -r$, quarum illa cum vi a grauitate orta α praebet $\alpha - R$. Frictione ergo adhuc semota, has habebimus aequationes:

$$\alpha - R = 2Lu + 2lv + 2\mathfrak{L} \text{ seu } R = \alpha - 2Lu - 2lv - 2\mathfrak{L}$$

$$-r = 2Mu + 2mv + 2\mathfrak{M} \text{ et } r = -2Mu - 2mv - 2\mathfrak{M}$$

vnde colligimus fore

$$dp = \alpha dx - 2(Lu + lv + \mathfrak{L})dx - 2(Mu + mv + \mathfrak{M})dy + \mathfrak{N}dt$$

quod differentiale oportet esse completum, seu integrabile.

46. Quia terminus αdx per se est integrabilis, et pro $\mathfrak{N}$ nihil est definitum, ex natura differentialium completorum necesse est, vt sit signandi modo iam supra adhibito:

$$\frac{d.\ Lu + lv + \mathfrak{L})}{dy} = \frac{d.(Mu + mv + \mathfrak{M})}{dx}$$

vnde ob $\frac{du}{dx} = L$, $\frac{du}{dy} = l$; $\frac{dv}{dx} = M$, et $\frac{dv}{dy} = m$, orietur

$$Ll + \frac{udL}{dy} + lm + \frac{vdl}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = ML + \frac{udM}{dx} + mM + \frac{vdm}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + v\left(\frac{dl}{dy} - \frac{dm}{dx}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dx} - \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$$

47. Verum ob differentialia $Ldx + ldy + \mathfrak{L}dt$ et $Mdx + mdy + \mathfrak{M}dt$ completa nouimus esse

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}; \quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy}; \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt} \text{ et } \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$

quibus valoribus substitutis habebimus istam aequationem:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dl - dM}{dx}\right) + \left(\frac{dl - dM}{dy}\right) + \frac{dl - dM}{dt} = 0$$

cui aperte satisfacit $l = M$: ita vt sit $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$. Cum igitur haec conditio requirat, vt sit $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}$, vicissim apparet, formulam differentialem hanc $udx + vdy$ esse debere completam in quo ergo criterium motus actualis consistit.

 48. Cri-

48. Criterium hoc independens eſt a praecedente, quod continuitas fluidi eiusque conſtans denſitas vniformis ſuppeditauit. Quare etiamſi fluidum in motu denſitatem ſuam mutaret, vti in motu fluidorum elaſticorum, veluti aëris euenire ſolet, haec proprietas nihilominus locum habere debet, vt ſit $udx + vdy$ differentiale completum. Siue celeritates u et v ſemper eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y, praeter tempus t, vt poſito tempore conſtante formula $udx + vdy$ integrationem admittat.

49. Hinc autem porro ipſam preſſionem p definire poterimus, id quod abſolute eſt neceſſarium, ad motum fluidi perfecte determinandum. Cum enim invenerimus $M = l$, erit

$$dp = \alpha dx - 2u(Ldx + ldy) - 2v(ldx + mdy) - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

At eſt $Ldx + ldy = du - \mathfrak{L}dt$; $ldx + mdy = dv - \mathfrak{M}dt$, vnde fit:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv + 2\mathfrak{L}udt + 2\mathfrak{M}vdt - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

Quodſi ergo preſſionem in ſingulis fluidi punctis pro tempore praeſente definire velimus, nullo reſpectu ad eius mutationem cum tempore oriundam habito, iſta nobis conſideranda erit aequatio:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy$$

eſtque noſtro deſignandi modo $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$ et $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; hincque

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\tfrac{du}{dt}.dx - 2\tfrac{dv}{dt}.dy$$

in cuius aequationis integratione tempus t pro conſtanti eſt habendum.

50. Haec

50. Haec autem aequatio per hypothesin est integrabilis, atque reuera talis deprehenditur, si ad criterium huius motus attendamus, quo vidimus, esse debere $udx + vdy$ differentiale completum, si quidem tempus t constans assumamus. Sit igitur S eius integrale, quod ergo eiusmodi erit functio ipsarum x, y et t, vt posito $dt = o$, prodeat $dS = udx + vdy$: sumto autem quoque tempore t variabili ponamus haberi

$$dS = udx + vdy + U dt$$

eritque propterea $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$. Tum vero est $U = \frac{dS}{dt}$.

51. His valoribus introductis habebitur:

$$\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy$$

huiusque formulae cum tempus t constans sumatur integrale manifesto est $= U$. Quod quo clarius appareat, ponamus $dU = K dx + k dy$, erit $\frac{dU}{dx} = K$ et $\frac{dU}{dy} = k$, vnde $\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy = K dx + k dy = dU$. Cum igitur huius integrale sit $= U = \frac{dS}{dt}$: erit

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2dU$$

vnde integrando prodit:

$$p = \text{Const.} + \alpha x - uu - vv - \frac{2dS}{dt}.$$

existente S functione ipsarum x, y et t, cuius differentiale posito $dt = o$, est $udx + vdy$.

52. Quo indoles huius formulae melius intelligatur, consideremus puncti l celeritatem veram, quae sit $= V = \sqrt{(uu + vv)}$. Atque erit pressio: $p = \text{Const.} + \alpha x - VV - \frac{2dS}{dt}$: in quo postremo termino dS denotat,

notat differentiale ipſius $S = \int (u\,dx + v\,dy)$, ſi tantum tempus t vt variabile ſpectetur.

53. Si iam frictionis quoque rationem habere velimus, eamque preſſioni p proportionalem ſtatuamus, dum punctum l elementum ds percurrit, erit vis retardatrix a frictione oriunda $= \frac{p}{f}$; vnde poſito $\frac{ds}{dt} = U$, aequatio noſtra differentialis, poſito t conſtante, erit:

$$dp = \alpha\,dx - \frac{p}{f}\,ds - 2\,V\,dV - 2\,dU$$

vnde integrando oritur, ſumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$,

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha\,dx - 2\,V\,dV - 2\,dV) \text{ ſiue}$$

$$p = \alpha x - VV - 2\,U - \tfrac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - VV - 2\,U)\,ds$$

54. Cum igitur criterium motus, quo fluidum re vera mouetur, in hoc conſiſtat, vt poſito tempore conſtante, differentiale $u\,dx + v\,dy$ ſit completum: continuitas autem et conſtans vniformis denſitas exigat, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, hinc ſequitur quoque hoc differentiale $u\,dy + v\,dx$ fore completum. Quare vtrinque coniunctim celeritates u et v eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y cum tempore t, vt hae ambae formulae $u\,dx + v\,dy$ et $u\,dy + v\,dx$ ſint differentialia completa.

55. Inſtituamus iam eandem inueſtigationem in genere, poſitisque puncti λ ternis celeritatibus ſecundum axes AL, AB, AC directis, u, v, w ſint eae eiusmodi functiones cum coordinatarum x, y, z, tum temporis t, vt differentiatione inſtituta fiat:

$du =$

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt$$

et quanquam hic quoque tempus t variabile eſt aſſumtum, tamen, vt motus ſit poſſibilis, per conditionem praecedentem oportet eſſe $L + m + \nu = 0$, ſiue quod eodem redit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

a qua proprietate quidem praeſens examen non pendet.

56. Elapſo autem tempuſculo dt, punctum λ transfertur in π, et ſecundum axem AL percurrit ſpatiolum $= u\,dt$, ſecundum axem AB ſpatiolum $= v\,dt$ et ſecundum axem AC ſpatiolum $w\,dt$. Quare nunc puncti λ in π exiſtentis ternae celeritates erunt:

ſecund. $AL = u + Lu\,dt + lv\,dt + \lambda w\,dt + \mathfrak{L}\,dt$
ſecund. $AB = v + Mu\,dt + mv\,dt + \mu w\,dt + \mathfrak{M}\,dt$
ſecund. $AC = w + Nu\,dt + nv\,dt + \nu w\,dt + \mathfrak{N}\,dt$

hincque accelerationes ſecundum easdem directiones erunt:

ſec. $AL = 2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$
ſec. $AB = 2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$
ſec. $AC = 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$

57. Si axem AC verticalem ſtatuamus, ita vt reliqui bini AL et AB ſint horizontales, ob grauitatem vis acceleratrix oritur ſecundum Axem $AC = -1$. Tum vero poſita preſſione in $\lambda = p$, eiusque differentiali, ſumto tempore conſtante,

$$dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$$

hinc

hinc orientur ternae vires acceleratrices

fec. $AL = -R$; fec. $AB = -r$ et fec. $AC = -\varrho$

quippe quae facile fimili modo colliguntur, quo ante §. 44 et 45. fumus vfi, ita vt fuperfluum foret, idem ratiocinium repetere. Quam ob rem habebimus has aequationes:

$$R = -2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$r = -2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\varrho = -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

58. Cum autem formula $dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$ debeat effe differentiale completum, erit

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dr}{dx};\quad \frac{dR}{dz} = \frac{d\varrho}{dx};\quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy}.$$

at differentiatione peracta obtinebuntur per -2 diuidendo tres fequentes aequationes

$$\text{I}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dy} + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{w\,d\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + Ll + lm + \lambda n = \\ \frac{u\,dM}{dx} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{w\,d\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + ML + mM + \mu N \end{cases}$$

$$\text{II}\ \begin{cases} \frac{u\,dL}{dz} + \frac{v\,dl}{dz} + \frac{w\,d\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + \mathfrak{L}\lambda + l\mu + \lambda\nu = \\ \frac{u\,dN}{dx} + \frac{v\,dn}{dx} + \frac{w\,d\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + NL + nM + \nu N \end{cases}$$

$$\text{III}\ \begin{cases} \frac{u\,dM}{dz} + \frac{v\,dm}{dz} + \frac{w\,d\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + M\lambda + m\mu + \mu\nu = \\ \frac{v\,dN}{dy} + \frac{v\,dn}{dy} + \frac{w\,d\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + Nl + nm + \nu n \end{cases}$$

59. Eft autem ex natura differentialium completorum

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy};\quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{dl}{dz};\quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{dM}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy};\quad \frac{dn}{dx} = \frac{dN}{dy};\quad \frac{d\nu}{dx} = \frac{dN}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy};\quad \frac{d\nu}{dy} = \frac{dn}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dy} = \frac{dn}{dt}$$

quibus

quibus valoribus fubftitutis tres illae aequationes abibunt in has:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}+(l-M(L+m)+\lambda n-\mu N=0\right.$$

$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-N)(L+\nu)+l\mu-nM=0$$

$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{dn}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)(m+\nu)+M\lambda-Nl=0$$

60. Manifeftum iam eft, his tribus aequationibus fatisfieri fequentibus tribus valoribus:

$$l=M;\quad \lambda=N;\quad \mu=n$$

quibus continetur criterium, quod confideratio follicitationum fuppeditat. Hinc ergo fequitur fore recepto defignandi modo

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx};\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx};\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

hae autem ipfae funt illae conditiones, quae requiruntur, vt haec formula $udx+vdy+wdz$ fit differentiale completum. Ex quo hoc criterium in eo confiftit, vt ternae celeritates u, v et w eiusmodi effe debeant functiones ipfarum x, y et z vna cum t, vt pofito tempore conftante formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittat.

61. Cum ergo pofito tempore t conftante, feu $dt=0$, fit

$$du=Ldx+Mdy+Ndz$$
$$dv=Mdx+mdy+ndz$$
$$dw=Ndx+ndy+\nu dz$$

valores autem pro R, r et ϱ fiant:

$$R=-2(Lu+Mv+Nw+\mathfrak{L})$$
$$r=-2(Mu+mv+nw+\mathfrak{M})$$
$$\varrho=-1-2(Nu+nv+\nu w+\mathfrak{N})$$

 pro

pro statu pressionis p haec habebitur aequatio:

$$\begin{aligned} dp = -dz - 2u(\mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz) &= -dz - 2udu - 2vdv - 2wdw \\ -2v(\mathrm{M}dx + mdy + ndz) \qquad & -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz \\ -2w(\mathrm{N}dx + ndy + \nu dz) & \\ -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz & \end{aligned}$$

62. Quia vero est $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$; $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; $\mathfrak{N} = \frac{dw}{dt}$; erit integrando:

$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2\int\left(\frac{du}{dt}.dx + \frac{dv}{dt}.dy + \frac{dw}{dt}.dz\right)$$

Cum autem per conditionem inuentam sit $udx + vdy + wdz$ integrabile, ponatur eius integrale $= \mathrm{S}$, quod, quoniam etiam tempus t inuoluere potest, sit sumto quoque t variabili:

$$d\mathrm{S} = udx + vdy + wdz + \mathrm{U}dt$$

eritque $\frac{du}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dy}$; $\frac{dw}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dz}$; Quare cum sit in genere sumto tempore t constante, vti id quidem in superiori integrali assumitur,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}.dx + \frac{d\mathrm{U}}{dy}.dy + \frac{d\mathrm{U}}{dz}.dz = d\mathrm{U}$$

habebimus:

$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2\mathrm{U}, \text{ siue}$$
$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2.\frac{d\mathrm{S}}{ds}$$

63. Perspicuum hic est, $uu + vv + ww$ exprimere quadratum verae puncti λ celeritatis ita, vt, si celeritas huius puncti vera dicatur $= \mathrm{V}$, habeatur pro pressione ista aequatio:

$$p = \mathrm{C} - z - \mathrm{V}\mathrm{V} - \frac{2d\mathrm{S}}{dt}.$$

ad quam ergo inueniendam, primum formulae $udx + vdy + wdz$, quam completam esse oportet, quaeratur integrale S, hocque denuo differentietur, posito solo tempore

pore t variabili, quod differentiale per dt diuisum, dabit valorem formulae $\frac{ds}{dt}$, quae in expressionem pro statu pressionis p inuentam ingreditur.

64. Quodsi iam prius criterium, quo motus saltem possibilis continetur, hic adiungamus, ternae celeritates u, v, w eiusmodi functiones ternarum coordinatarum x, y et z vna cum tempore t esse debent, vt primo sit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum; deinde vero, vt sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Hisque duabus conditionibus omnis fluidorum motus, siquidem densitate inuariabili sint praeditae, subiicitur. Praeterea vero, si sumto etiam tempore t variabili, haec formula $udx + vdy + wdz + Udt$ fuerit differentiale completum, status pressionis in puncto quocunque λ exprimitur, altitudine p, vt sit:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

siquidem fluidum grauitate naturali gaudeat, et planum BAL fuerit horizontale.

65. Si grauitati aliam directionem tribuissemus, siue etiam vires vtcunque variabiles assumsissemus, quibus singulae fluidi particulae sollicitarentur, inde tantum discrimen in valorem pressionis p esset ingressum, neque inde lex, quam ternae cuiusque puncti fluidi celeritates sequi debent, vllam mutationem esset passa. Semper ergo, quaecunque fuerint vires sollicitantes, ternae celeritates u, v, et w ita debent esse comparatae, vt formula $udx + vdy + wdz$ fiat differentiale completum, atque vt insuper sit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Infinitis igitur modis constitui poterunt ternae celeritates

u, v et w, vt his duabus conditionibus satisfiat; atque tum pressio fluidi in singulis punctis poterit assignari.

66. Multo difficilior autem foret quaestio, si, datis viribus sollicitantibus, vna cum pressione in quibusdam locis, ipse motus fluidi in singulis punctis determinari deberet. Tum enim haberentur aliquot aequationes formae $p = C - z - uu - vv - ww - 2U$, ex quibus, cum constans C, tum vero ratio functionum u, v et w ita definiri deberet, vt non solum his casibus istis aequationibus satisfieret, sed etiam ante allatae regulae obseruarentur, quod opus vtique maximam calculi vim requireret. Conueniet igitur in genere in naturam functionum idonearum inquiri, quae vtrique criterio futurae sint conformes.

67. Commodissime igitur incipiemus ab ipsa quantitate integrali, cuius differentiale esse oportet formulam $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ posito tempore constante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipsarum x, y et z, tempore t in quantitatibus constantibus inuoluto; atque si haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz statim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praesenti tempore conueniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae sunt x, y et z. Quaestio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipsarum x, y et z, pro S assumi debeant, vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; seu cum sit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt sit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

68. Quo-

68. Quoniam non patet, quomodo hoc generaliter praestari possit, casus quosdam generaliores contemplabor. Sit igitur

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

eritque:

$\frac{dS}{dx} = nA(Ax+By+Cz)^{n-1}$ et $\frac{ddS}{dx^2} = n(n-1)AA(Ax+By+Cz)^{n-2}$ similesque erunt formae pro $\frac{ddS}{dy^2}$ et $\frac{ddS}{dz^2}$, vnde effici debet, vt sit

$$n(n-1)(Ax+By+Cz)^{n-2}(AA+BB+CC) = 0$$

cui primo satisfit, si vel $n=0$, vel $n=1$; ex quo iam duo valores idonei obtinentur, scilicet $S = \mathrm{Const.}$ et $S = Ax + By + Cz$, vbi constantes A, B, C etiam tempus vtcunque in se complecti possunt.

69. Sin autem n neque $=0$, neque $=1$, necesse est, vt sit: $AA + BB + CC = 0$: tumque pro S valor idoneus erit

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

quicunque numerus pro exponente n sumatur, quin etiam ipsum tempus t in n poterit ingredi. Patet etiam aggregatum quotcunque huiusmodi formularum idoneum valorem pro S praebere, ita, vt sit:

$$S = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon(Ax+By+Cz)^n + \zeta(A'x+B'y+C'z)^{n'} + \eta(A''x+B''y+C''z)^{n''} + \theta(A'''x+B'''y+C'''z)^{n'''} \text{ etc.}$$

dummodo fuerit:

$$AA+BB+CC=0;\ A'A'+B'B'+C'C'=0;\ A''A'' + B''B''+C''C''=0 \text{ etc.}$$

70. Hinc valores idonei pro S ex inferioribus ordinibus, vbi coordinatae x, y, z, vel vnam, vel

duas, vel tres, vel quatuor habent dimensiones, erunt sequentes.

I. $S = A$

II. $S = Ax + By + Cz$

III. $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$
existente $A + B + C = 0$

IV. $S = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxxy + 3Fxxz + 3Hyyz + 6Kxyz$
$+ 3Exyy + 3Gxzz + 3Iyzz$

existente $A + E + G = 0$; $B + D + I = 0$; $C + F + H = 0$

$$\text{V. } S = \begin{array}{l} + Ax^4 + 6Dxxyy + 4Gx^3y + 4Hxy^3 + 12Nxxyz \\ + By^4 + 6Exxzz + 4Ix^3z + 4Kxz^3 + 12Oxyyz \\ + Cz^4 + 6Fyyzz + 4Ly^3z + 4Myz^3 + 12Pxyzz \end{array}$$

existente $A + D + E = 0$ $G + H + P = 0$
$B + D + F = 0$ $I + K + O = 0$
$C + E + F = 0$ $L + M + N = 0$

71. Hinc perspicuum est, quomodo hae formulae pro quolibet ordine se sint habiturae: singulis scilicet terminis primo iidem dentur coefficientes numerici, qui iisdem terminis ex lege permutationum conveniunt, seu, qui oriuntur, si trinomium $x + y + z$ ad potestatem eiusdem ordinis eleuetur. Numericis autem coefficientibus adiungantur litterales indefiniti A, B, C, etc. Tum reiectis numericis dispiciatur, quoties eiusmodi terni termini occurrunt $LZxx + MZyy + NZzz$, qui scilicet factorem communem Z ex variabilibus formatum habeant, totiesque summa coefficientium litteralium $L + M + N$ statuatur nihilo aequalis. Ita cum pro potestate quinta habeatur.

$$S = \begin{array}{l} + Ax^5 + 5Dx^4y + 5\mathfrak{D}x^4z + 10Gx^3yy + 10\mathfrak{G}x^3zz + 20Kx^3yz + 30Nxyyzz \\ + By^5 + 5Exy^4 + 5\mathfrak{E}y^4z + 10Hx^2y^3 + 10\mathfrak{H}y^3zz + 20Lxy^3z + 30Oxxyzz \\ + Cz^5 + 5Fxz^4 + 5\mathfrak{F}yz^4 + 10Ixxz^3 + 10\mathfrak{I}yyz^3 + 20Mxyz^3 + 30Pxxyyz \end{array}$$

sequen-

ſequentes habebuntur coefficientium litteralium determinationes:

$A+G+\mathfrak{G}=0$; $D+H+O=0$; $\mathfrak{D}+I+P=0$
$B+H+\mathfrak{H}=0$; $E+G+N=0$; $\mathfrak{E}+\mathfrak{J}+P=0$; $K+L+M=0$
$C+I+\mathfrak{J}=0$; $F+\mathfrak{G}+N=0$; $\mathfrak{F}+\mathfrak{H}+O=0$

Simili modo pro ordine ſexto huiusmodi determinationes prodibunt 15, pro ſeptimo 21, pro octauo 28 et ita porro.

72. Iam formula prima $S=A$, quoniam coordinatas x, y et z plane non in ſe complectitur, ternas celeritates u, v, et w nihilo aequales praebebit, ſicque ſtatum fluidi quietum exhibebit. Preſſio tamen in quouis puncto pro variis temporibus vtcunque poterit eſſe variabilis. Cum enim A ſit functio quaecunque temporis, ad datum tempus t preſſio in puncto λ erit $p=C-\frac{2\,dA}{dt}-z$: qua formula eiusmodi fluidi ſtatus indicatur, vbi fluidum quouis momento a viribus quibuscunque ſollicitatur, quae tamen ſe ſemper in aequilibrio teneant, vt ab illis nullus motus in fluido oriri queat: vbi euenit, ſi fluidum vaſi fuerit incluſum, ex quo nusquam erumpere queat, atque in eo a viribus quibuscunque comprimatur.

73. Formula autem ſecunda $S=Ax+By+Cz$ differentiata, has praebebit puncti λ ternas celeritates:

$$u=A;\; v=B \text{ et } w=C.$$

Eodem ergo tempore omnia fluidi puncta pari motu feruntur ſecundum eandem directionem. Ex quo totum fluidum, perinde ac corpus ſolidum, mouebitur, quod ſolo motu progreſſiuo fertur. Diuerſo autem tempore

pore huius motus tam celeritas, quam directio, vtcunque variari poterit, prout vires extrinsecus vrgentes exegerint. Pressio ergo in puncto λ ad tempus t, cuius A, B, C sunt functiones, erit $p = C - z - AA - CC - 2x.\frac{dA}{dt} - 2y.\frac{dB}{dt} - z\frac{dC}{dt}$.

74. Formula tertia $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, vbi est $A + B + C = 0$, has praebebit ternas puncti λ celeritates: $u = 2Ax + 2Dy + 2Ez$; $v = 2By + 2Dx + 2Fz$; $w = 2Cz + 2Ex + 2Fy$, seu $w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z$. Hoc ergo casu etiam eodem temporis momento diuersa fluidi puncta diuerso motu feruntur; successu autem temporis etiam eiusdem puncti motus quomodocunque variabilis existere potest, quia pro A, B, D, E, F functiones quascunque temporis t assumere licet. Multo maior autem varietas locum habebit, si functioni S valores magis compositi tribuantur.

75. Quia casu secundo motus fluidi conueniebat cum motu corporis solidi progressiuo, quo scilicet vnoquoque momento singulae partes motu aequali sibique parallelo feruntur: suspicari liceat, in aliis casibus motum fluidi, quoque cum motu corporis solidi, siue rotatorio, siue vtcunque anomalo conuenire posse. Satis igitur erit ostendisse huiusmodi conuenientiam, praeter
Tab. IV. casum secundum, nunquam locum habere posse. Vt
Fig. 2. enim hoc eueniret, necesse esset, vt pyramis $\pi\phi\varrho\sigma$ non solum aequalis, sed etiam similis fieret pyramidi $\lambda\mu\nu o$; seu vt foret:

$\pi\phi =$

$$\pi\Phi = \lambda\mu = dx = \sqrt{(QQ + qq + \Phi\Phi)}$$
$$\pi\varrho = \lambda\nu = dy = \sqrt{(RR + rr + \varrho\varrho)}$$
$$\pi\sigma = \lambda o = dz = \sqrt{(SS + ss + \sigma\sigma)}$$
$$\Phi\varrho = \mu\nu = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((Q-R)^2 + (q-r)^2 + (\Phi-\varrho)^2)}$$
$$\Phi\sigma = \mu o = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \sqrt{((Q-S)^2 + (q-s)^2 + (\Phi-\sigma)^2)}$$
$$\varrho\sigma = \nu o = \sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \sqrt{((R-S)^2 + (r-s)^2 + (\varrho-\sigma)^2)}$$

adhibitis valoribus in §. 32. vſurpatis.

76. Ternae autem poſteriores aequationes, cum prioribus coniunctae, reducentur ad has:

$$QR + qr + \Phi\varrho = 0;\ QS + qs + \Phi\sigma = 0 \text{ et } RS + rs + \varrho\sigma = 0$$

ternae autem priores, ſi pro litteris Q, R, S, q, r, s, Φ, ϱ, σ valores in §. 34. aſſignati ſubſtituantur, terminique prae reliquis euaneſcentes praetermittantur, dabunt has aequationes:

$$1 = 1 + 2L\,dt;\quad l + M = 0$$
$$1 = 1 + 2m\,dt;\quad \lambda + N = 0$$
$$1 = 1 + 2\nu\,dt;\quad \mu + n = 0$$

vnde fit $L = 0$, $m = 0$, et $\nu = 0$, $M = -l$; $N = -\lambda$ et $n = -\mu$.

77. Celeritates ergo ternae cuiusque puncti λ eſſe deberent ita comparatae, vt foret

$$du = l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = l\,dx + \mu\,dz$$
$$dw = \lambda\,dx + \mu\,dy$$

Verum ſecunda conditio motus fluidorum poſtulat, vt ſit $l = M$, $\lambda = N$ et $n = \mu$; vnde omnes coefficien-

 tes

tes l, λ et μ euaneſcent, celeritatesque u, v et w pro eodem tempore in omnibus fluidi punctis eaedem, ſeu conſtantes, prodibunt. Patet igitur, non niſi hoc caſu fluidi motum cum motu corporis ſolidi conuenire poſſe.

78. Vt autem effectus virium, quae extrinſecus in fluidum agunt, definiri poſſit, primum eae vires determinari debent, quae ad motum, quem fluido ineſſe aſſumimus, efficiendum requiruntur: his enim viribus eae, quae actu fluidum ſollicitant, aequiualentes ſtatui debent; ſupra autem §. 56. vidimus, in puncto λ ternas vires acceleratrices requiri, quae ibi ſunt relatae. Quare ſi fluidi elementum ibi concipiatur, cuius volumen, ſeu maſſa, ſit $= dx\,dy\,dz$, vires motrices ad motum requiſitae erunt:

$$\text{ſec. AL} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{L}u + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$\text{ſec. AB} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{M}u + mv + \mu w + \mathfrak{M}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} + w.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$\text{ſec. AC} = 2\,dx\,dy\,dz(\mathrm{N}u + nv + \nu w + \mathfrak{N}) = 2\,dx\,dy\,dz\left(u.\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w.\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

vnde per triplicem integrationem vires totales, quae totam fluidi maſſam ſecundum easdem directiones ſollicitare debent, colligentur.

79. Cum autem ſecunda conditio poſtulet, vt ſit $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ differentiale completum, cuius integrale ſit $= \mathrm{S}$; ponatur poſito quoque tempore variabili, vt ante: $dS = u\,dx + v\,dy + w\,dz + \mathrm{U}\,dt$, vnde ob $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ etc. tres illae vires motrices euadent:

$$\text{ſec. AL} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial w + \partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)$$
$$\text{ſec. AB} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial\, w\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)$$
$$\text{ſec. AC} = 2\,dx\,dy\,dz\left(\frac{u\partial u + v\partial v + w\partial w + \partial \mathrm{U}}{\partial z}\right).$$

80. Po-

80. Ponatur nunc $uu+vv+ww+2U=T$, eritque T functio coordinatarum x, y, z; ponatur ergo posito tempore constante,

$$dT=Kdx+kdy+udz$$

eruntque tres illae vires motrices elementi $dxdydz$

sec. $AL=Kdxdydz$

sec. $AB=kdxdydz$

sec. $AC=kdxdydz$

triplici ergo integratione hae formulae per totam fluidi massam sunt extendendae, vt inde vires omnibus aequiualentes earumque mediae directiones obtineantur. Verum haec discussio est altioris indaginis, cui hic non immoror.

81. Quantitas autem haec $T=uu+vv+ww+2U$, cuius in hoc calculo ratio est habenda, etiam simpliciorem formulam pro altitudine p pressionem exprimente suppeditat; est enim $p=C-z-T$: siquidem singulae fluidi particulae a sola grauitate vrgeantur. Sin autem quaelibet particula λ a ternis viribus acceleratricibus sollicitetur, quae sint Q, q et Φ, secundum directiones axium AF, AB et AC respectiue agentes, et calculo, vt supra, subducto reperietur pressio:

$$p=C+\int(Qdx+qdy+\Phi dz)-T$$

vnde patet differentiale $Qdx+qdy+\Phi dz$ completum esse debere, alioquin status aequilibrii, vel saltem possibilis, non daretur. Hanc autem conditionem in vires sollicitantes Q, q et Φ competere oportere, a Cel. D^no^. *Clairaut* iam praeclare est demonstratum.

82. En ergo principia vniuersae doctrinae de motu fluidorum, quae etsi primo intuitu non admodum foecunda videantur, tamen fere omnia, quae adhuc tam in hydrostatica, quam in hydraulica sunt tradita, in se complectuntur, ita vt haec principia latissime patere sint censenda. Quod quo clarius appareat, operae pretium erit ostendere, quomodo cognita hydrostaticae et hydraulicae praecepta ex hactenus traditis principiis plane ac dilucide consequantur.

83. Consideremus igitur primo fluidum in statu quietis, ita vt sit $u = 0$; $v = 0$ et $w = 0$, eritque pressio in quouis fluido puncto λ, ob $T = 2U$,

$$p = C + \int(Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - 2U$$

vbi, cum U sit functio ipsius temporis t, quod constans assumimus, quia pressionem ad datum tempus inuestigamus, haec quantitas U in ipsa constante C comprehendi poterit, ita vt sit:

$$p = C + \int(Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$$

vbi Q, q et Φ sunt vires particulam aquae λ secundum axes AL, AB et AC sollicitantes.

84. Quoniam pressio p non nisi a situ puncti λ, hoc est a coordinatis x, y et z, pendere potest, necesse est, vt $\int(Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$ sit earum functio determinata, quae ergo integrationem admittat. Vnde primo patet, quod modo innui, fluidum in aequilibrio subsistere non posse, nisi vires, singula fluidi elementa sollicitantes, ita fuerint comparatae, vt formula $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ sit differentiale completum. Cuius ergo integrale si ponatur $= P$, erit pressio in λ, $p =$

$C + P$;

C + P: Ita si sola adsit grauitas secundum directionem CA vrgens, erit $p = C - z$, vnde si pressio in vno puncto λ constet, vnde constans C colligi queat, pro eodem tempore inde pressio in omnibus omnino punctis definietur.

85. Interim tamen tempore fluente pressio in eodem loco variari poterit, id quod scilicet eueniet, si vires aquam extrinsecus vrgentes, quarum ratio nondum est habita in iis viribus, quae in singula elementa singulatim agere assumuntur, fuerint variabiles, ita tamen, vt se mutuo in aequilibrio seruent, nullumque motum producant. Quod si autem hae vires nulli mutationi sint obnoxiae, littera C denotabit quantitatem reuera constantem, neque a tempore t pendentem; eodemque in loco λ perpetuo eadem pressio $p = C + P$ reperietur.

86. In huiusmodi ergo fluidi statu permanente eius extrema figura, quae nullis viribus est exposita, determinari poterit. In hac enim extremitate, qua fluidum sibi est relictum, neque a parietibus vasis, cui forte est inclusum, continetur, necesse est, vt pressio sit nulla. Habebitur ergo haec aequatio: $P = \text{const.}$ qua figura extremae superficiei fluidi per relationem inter ternas coordinatas x, y et z, exprimetur. Atque si pro extremitate fuerit $P = E$, ob $C = -E$, in quouis alio loco λ interno erit pressio $p = P - E$. Ita si particulae fluidi a sola grauitate vrgeantur, ob $p = C - z$, pro extremitate superficiei habebitur $z = C$, qua intelligitur, extremam superficiem liberam esse horizontalem.

 87. De-

87. Deinde etiam omnia, quae adhuc de motu fluidi per tubos ſunt eruta, ex his principiis facile deducuntur. Tubi autem vel anguſtiſſimi conſiderari ſolent, vel tales aſſumuntur, vt per quamlibet ſectionem ad tubum normalem fluidum aequali motu transfluat: vnde haec regula naſcitur, vt celeritas fluidi in quovis tubi loco ſit eius amplitudini reciproce proportiona-
Tab. IV. lis. Sit igitur λ punctum quodcunque huiusmodi tubi,
Fig. 2. cuius figura per geminam aequationem inter ternas coordinatas x, y et z exprimetur, ita vt inde pro quauis abſciſſa x, ambae reliquae y et z definiri queant.

88. Sit praeterea huius tubi amplitudo in $\lambda = rr$, in alio autem tubi loco fixo, vbi amplitudo ſit $= ff$, ſit tempore praeſente fluidi celeritas $= \vartheta$, de hinc autem elapſo tempuſculo dt euadat ea $= \vartheta + d\vartheta$ eritque ergo ϑ functio tempus t tantum, pariter ac $\frac{d\vartheta}{dt}$. Hinc ergo vera fluidi celeritas in λ erit tempore praeſenti $V = \frac{ff\vartheta}{rr}$. Cum nunc ex figura tubi dentur y et z per x, ſit $dy = \eta dx$ et $dz = \theta dx$; vnde ternae puncti fluidi in λ celeritates erunt ſecundum directiones AL, AB et AC ſequentes:

$$u = \frac{ff\vartheta}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ v = \frac{ff\vartheta}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ w = \frac{ff\vartheta}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}}$$

hincque fit $uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \vartheta\vartheta}{r^4}$: eſtque rr functio ipſius x, indeque pendentium y et z.

89. Cum nunc $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ debeat eſſe differentiale completum, cuius integrale poſuimus $= S$, erit:

$$dS = \frac{ff\vartheta}{rr} \cdot \frac{dx(1+\eta\eta+\theta\theta)}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}} = \frac{ff\vartheta}{rr} \cdot dx\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}.$$

At $dx\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}$ exprimit elementum ipſius tubi, bii, quod si ponamus $= ds$, erit $dS = \frac{ff u ds}{rr}$: vnde cum hic tempus t constans sit assumtum, cuius functio est u; quantitates autem s et rr non a tempore t, sed tantum a figura tubi, pendeant; erit $S = u \int \frac{ff ds}{rr}$.

90. Ad pressionem iam p, quae nunc in tubi puncto λ locum habet, inueniendam, considerari debet quantitas U, quae ex differentiatione quantitatis S oritur, si solum tempus t, vt variabile, tractetur, ita vt sit $U = \frac{dS}{dt}$. Cum igitur formula integralis $\int \frac{ff ds}{rr}$ tempus t non inuoluat, erit vtique $\frac{dS}{dt} = U = \frac{du}{dt} \int \frac{ff ds}{rr}$; sicque erit ex §. 80:

$$T = \frac{f^4 uu}{r^4} + \frac{2 du}{dt} \int \frac{ff ds}{rr}$$

Quare positis quibuscunque viribus sollicitantibus Q, q et Φ, erit pressio in λ:

$$p = C + \int (Q dx + q dy + \Phi dz) - \frac{f^4 uu}{r^4} - \frac{2 du}{dt} \int \frac{ff ds}{rr}.$$

quae est ea ipsa formula, quae vulgo pro motu fluidi per tubos erui solet; atque adeo multo latius patens, quia vires quaecunque fluidum sollicitantes hic sunt assumtae, dum vulgo haec formula ad solam grauitatem adstringitur. Interim hic probe est recordandum, ternas vires Q, q, et Φ necessario ita comparatas esse oportere, vt formula: $Q dx + q dy + \Phi dz$ sit differentiale completum, seu integrationem admittat.

DE

Fig: 1.

Fig: 3.

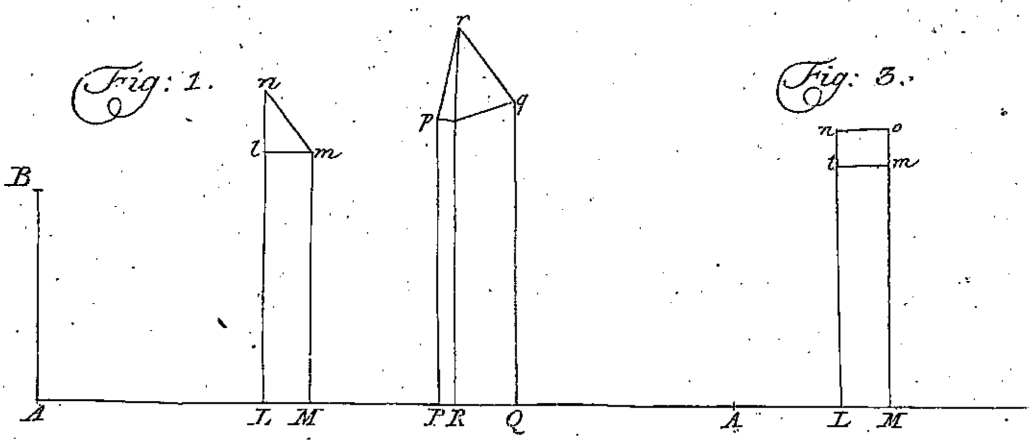

Fig: 2.